

## 원추형 끼워맞춤된 인공고관절의 축대칭 접촉 응력 해석

경희대학교 의과대학 정형외과학교실 · 한국 과학기술원\*

윤용산\* · 김영룡 · 이계립 · 김승기 · 강영훈\*

= Abstract =

### Axisymmetric Contact Stress Analysis of an Artificial Hip Joint of the Conical Fitting Type

Yong San Yoon, Ph.D.,\* Young Yong Kim, M.D., Kye Lim Lee, M.D., Seung Key Kim, M.D.  
and Young Hoon Kang, M.S.\*

Department of Orthopaedic Surgery, College of Medicine, Kyung Hee University, Seoul, Korea  
Korea Advanced Institute of Science and Technology\*

The purpose of this study is to investigate the effect of the ball-cone contact interface variation on the ceramic ball stress which is the dominant factor of the design of the modular artificial hip joint.

A contact stress analysis problem is formulated using the optimization principle and finite element analysis technique on the ball-cone system of three dimensional axi-symmetrical model. Numerical procedure is employed to get the solution for varying angles of cones and angular mismatches between the ball and cone interfaces. There is a fair amount of friction in the interface and included in the analysis model.

**Key words:** Contact stress, Finite element analysis.

## 서 론

인체의 불완전한 역학적 기능을 대신하기 위한 수단으로 인공관절이 사용되는데 전 세계적으로 매년 40만건 이상의 인공관절 수술이 이루어지고 있다<sup>9)</sup>. 인체의 여러 관절 중에서도 상체와 하체를 연결하는 고관절은 운동시에 가장 중요한 역학적 기능을 수행한다. 따라서 불완전한 고관절의 기능을 대신하기 위한 인공고관절은 인공관절 중에서 가장 먼저 개발되었고 가장 널리 사용되고 있다. 인공고관절은 크게 상체측의 골반과 연결하는 비구부요소(acetabular component)와 하체측의 대퇴부 요소(femoral component)로 구성된다. 대퇴부 요소는 또 윗쪽의 비구부 요소와 접촉하는 ball 부분과 아래쪽의 대퇴골에 삽입되는 주대 부분으로 이루어져 있는데 불과 주대 부분이 하나의 재료

로서 일체형으로 된 것도 있고 ball은 세라믹(ceramic), 주대는 steel로 따로 만들어서 끼워맞출 수 있게 한 것이 있다. 본 논문에서 해석하고자 하는 것도 이와 같은 형식의 것으로서 끼워맞춤방식을 쓰면 비구부 요소와 ball부분의 마찰을 줄일 수 있고 따라서 마모조각 등도 방지할 수 있다. 또한 사람마다 골반의 크기도 다르기 때문에 그 환자에 적합한 ball의 크기를 선택해서 주대부와 끼워맞추면 되기 때문에 수술시에도 매우 편리하다. 원추형 끼워맞춤 요소는 이와 같은 모듈식 보철물의 결합과 길이의 조절을 위하여 쓰여 질수 있는 매우 간편한 방법이다. 공학적인 측면으로는 축과 회전체와의 결합 공작기계의 테이퍼 결합부등의 동력전달 용으로 이용되고 있는 기계요소로서 이는 제작 및 조립이 간편하다는 장점으로 인하여 널리 쓰이고 있다.

본 논문에서는 물체의 형상과 작용하는 하중

이 모두 확대칭인 원추형 끼워 맞춤 문제를 마찰을 고려하고서 해석해 보기로 한다. 해석하고자 하는 물체는 끼워맞춤방식의 인공고관절이며 여기서 가정한 것은 이 물체의 형상으로 보아 축방향 하중만을 받을 경우 마찰력의 방향은 작용하는 하중에 반대방향으로 일정하고 크기는 마찰면에 수직으로 작용하는 힘에 마찰계수를 곱한 것으로 하였다.

## 연구대상 및 방법

### 1. 탄성 접촉 문제의 수식화의 가정

그림1과 같이 원추형 끼워맞춤요소가 축방향 하중만을 받고 원추각  $\alpha$ 가 주어졌을때 두 물체의 접촉점에서 마찰력의 크기를 접촉력에 마찰계수를 곱한 값으로 하고 그 방향은 외부 작용 하중에 반대방향이라고 하면 다음 평형식이 성립한다.

$$F = \Sigma P(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \dots\dots\dots (1)$$

여기서 F는 외부하중이고  $\Sigma P$ 는 각 접촉점에서 접촉력의 합이고  $\mu$ 는 마찰계수이다. 위식에서 보듯이 원추각과 마찰계수가 주어지면 접촉력의 합을 구할 수 있다. 그러면 식(1)의 우변 첫 항은 접촉면에 수직으로 작용하는 힘들의 합력이 외부하중에 대항하는 힘이고 둘째 항은 마찰력의 합이 외부하중에 대항하는 힘이 된다. 다시 말하면 각 접촉점에서의 힘의 분포상황은 알 수가 없지만 그들 합력이 외부하중에

대항하는 힘은 구할 수가 있는 것이다. 따라서 본 논문에서는 다음과 같이 생각해 보았다. 처음에  $\Sigma P \sin \alpha$ 의 힘을 외부하중으로 가하여 마찰 없는 경우의 해석을 하고 각각의 접촉점에서 접촉력 P를 구한다. 두번째 반복 부터는 전체 힘 F를 가하고 각각의 접촉점에서는 마찰력을 외력으로 취급하여 각 물체에 가해 첫번째와 같은 방법으로 접촉력 P를 구한다. 이런 방법으로 계속하여 각 접촉점에서 접촉력 P의 크기에 변화가 거의 없으며 평형상태를 이루었다고 보고 반복을 그만두면 되는 것이다. 따라서 위와 같이 마찰력의 크기와 방향을 미리 할 수 있다고 가정하면 마찰을 무시했을 때의 접촉문제를 해석하는 수식을 그대로 이용할 수 있다.

### 2. 문제의 정의

수식전개의 편의를 위해서 다음과 같은 기호를 사용하고자 한다(그림 2). 물체가 차지하고 있는 영역을  $\Omega$ , 물체의 경계를  $\Gamma$ 라 하면  $\Gamma$ 는 다음의 세 경계면으로 이루어져 있다. 변위가 주어지는 경계면을  $\Gamma_u$ , 외력이 가해지는 경계면을  $\Gamma_f$ , 접촉이 예상되는 예상접촉 경계면  $\Gamma_c$ 로 나누어져 있다. 접촉하는 두 물체의 물리량을 구별하기 위하여 상첨자 1, 2를 썼으며 벡터와 텐서의 좌표방향 성분을 표시하기 위하여 하첨자를 사용하였고 중복된 하첨자는 합을 뜻한다. 서로 접촉하는 두 물체를 각각 물체 1과

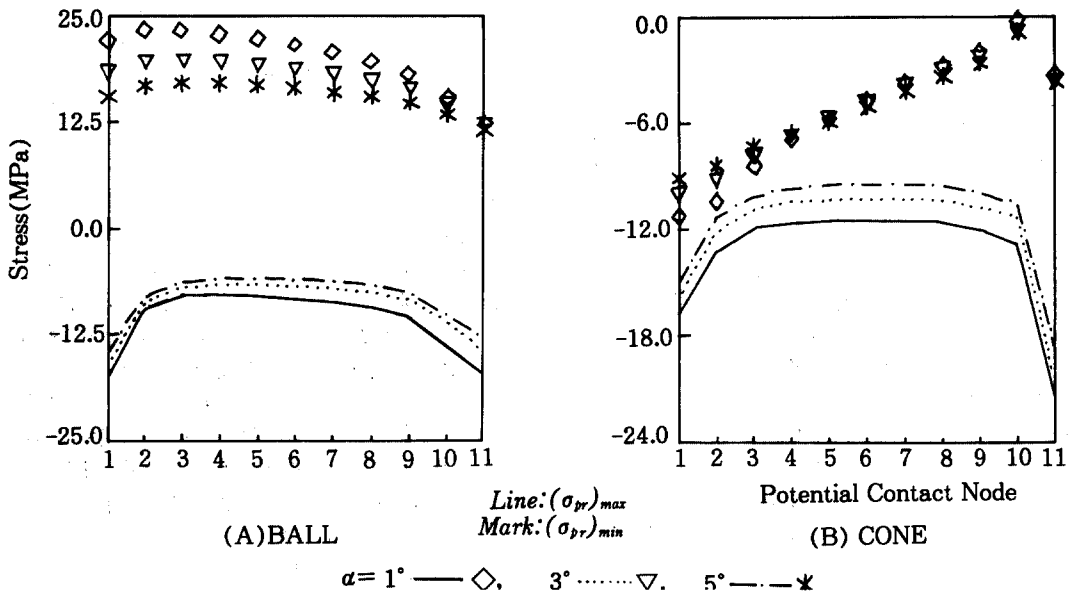


Fig. 1. Effects of Cone Angle on Contact Stress when  $\Delta\alpha=0^\circ, \mu=0.2, F=2000N$ .



$$\phi \geq 0 \dots\dots\dots(8)$$

$\phi=0$ 인 경우는  $\Gamma_c$ 과  $\Gamma_c^2$ 상에 위치한 한 쌍의 예상 접촉점이 접촉한 상태를 나타내며  $\phi>0$ 인 경우는 서로 분리되어 있음을 나타낸다. 예상 접촉점이 분리된 경우는 접촉압력  $P$ 는 0이어야 한다. 그러므로 접촉 간극이나 접촉 압력 중의 하나가 0이어야 한다는 조건은 다음의 비선형식으로 표시된다.

$$P, \phi=0 \dots\dots\dots(9)$$

접촉면이 접촉되어 있지 않다고 가정하면 접촉 압력은 반드시 압축력이어야 한다. 압축력을 양으로 정의 할때 접촉압력의 부호는

$$P \geq 0 \dots\dots\dots(10)$$

강체 운동이 허용되고 있는 물체 1의 변형을 해석할때 고려되는 힘은 외력과 접촉 압력이며 만일 이 힘들이 평형을 이루지 못하면 강체 운동을 구속한 점들에서 반력이 생기게 된다. 이와 같은 반력을 0이 되게 하려면 가상일의 원리 (virtual work principle)에 따라 다음의 외부 평형 방정식이 만족되어야 한다.

$$\int_{\Gamma_j'} f_i' h_{ij} ds = \int_{\Gamma_c'} P \alpha_{ij} n_i' ds \dots\dots\dots(11)$$

여기서  $h_{ij}$ 와  $\alpha_{ij}$ 는 각각  $\Gamma_j'$ 과  $\Gamma_c'$ 에서의 점들의  $j$ 방향 단위 강체운동변위에 의한  $i$ 방향 변위 성분을 뜻한다. 변형 후의 접촉영역은 식(8)에서  $\phi=0$ 이 만족되는 접촉점으로 표시되며 접촉압력은 식(9)-(11)의 조건을 만족하여야 한다.

#### 4. 상당 최소화 문제

이상에서 열거한 식들을 직접 푸는 것은 방정식 (9)이 비선형식이며 부등식 (8)과 (10)이 있기 때문에 매우 어렵다. 또한 축차적인 방법을 이용하게 되면 초기 접촉 영역을 예측하기 어렵고 또한 축차회수는 이 예측에 따라 많이 변하기 때문에 문제에 따라 해를 구하는 시간이 달라지는 단점이 있다. 따라서 이상에서 열거한 식들과 동등하다고 알려진 제한조건을 최소화 문제로 바꾸어 해를 구하고자 한다. 제안된 최소화 문제는 다음과 같다.

$$\text{Min } J(u^1, u^2, q) \dots\dots\dots(12)$$

$$\text{s.t. } -\phi \leq 0 \text{ on } \Gamma_c \dots\dots\dots(13)$$

$$J = \int_{\Omega^1} 1/2 \sigma_{ij}^1 \epsilon_{ij}^1 dv + \int_{\Omega^2} 1/2 \sigma_{ij}^2 \epsilon_{ij}^2 dv - \int_{\Gamma_j'} f_i' (u^1 + h_{ij} q_j) ds - \int_{\Gamma_j^2} f_i^2 u^2 ds \dots\dots\dots(14)$$

#### 5. 모델 설명

원추형 끼워 맞춤요소는 공학적으로 축과 회전체와의 결합, 공작기계의 테이퍼 결합부등의 동력전달용으로 이용되며 생체역학 분야로는 본 논문에서와 같이 인공고관절의 끼워 맞춤방식등에 사용되고 있다. 특히 후자의 경우에는 인체에 사용되므로 이의 안전설계를 위해서는 여러가지 하중에 의하여 발생하는 접촉면에서의 응력 집중을 정확히 해석할 필요가 있겠으나 본 연구에서는 해석상의 어려움과 계산시간의 제한으로 축방향 하중만을 받을 경우를 마찰을 고려하고서 계산하였다. 끼워 맞춤된 인공고관절의 접촉형태는 그림 4와 같다. 여기서 위쪽 물체를 원구(ball), 아래쪽을 원추(cone)라 부르기로 하며 원구의 안쪽 원 부분은 A와 B를 반지름으로 하는 타원으로 모델링하였다. 원추각  $\alpha$ 는 알아보기 위하여  $1^\circ, 3^\circ, 5^\circ$ 의 경우를 해석하였다. 참고로 실제 제품의 원추각은  $3.5^\circ$  정도이다. 테이퍼의 반경에 따르는 변화는 R2와  $\alpha$ 에 의하여 결정된다. 그림 5는 두 물체의 원추각이 일치하지 않는 mismatching 문제를 나타낸 것이다. Ball의 원추각을  $\alpha^1$ -, cone의 원추각을  $\alpha^2$ 라고 할때 원추각의 불일치 정도를 다음과 같이 정의하였다.

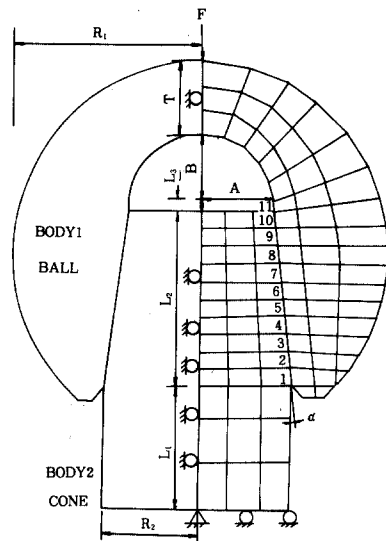


Fig. 4. Finite Element Model of Artificial Hip Joint.

$$\Delta\alpha = \alpha^1 - \alpha^2 \dots\dots\dots(15)$$

여기서  $\Delta\alpha$ 의 단위는 degree이다. 예상접촉 점의 초기간격은  $\alpha^1$ 과  $\alpha^2$ 에 의하여 결정되며  $\Delta\alpha > 0$  일때의 초기 접촉상태는 절점 11에서만 접촉하고  $\Delta\alpha < 0$  일때는 절점 1에서만 접촉하게 된다. 사용된 유한요소는 선형 모양함수를 가지는 4절점 축대칭 요소로서 원구에 대해 50개, cone에 대해서는 39개 이며 총자유도 수

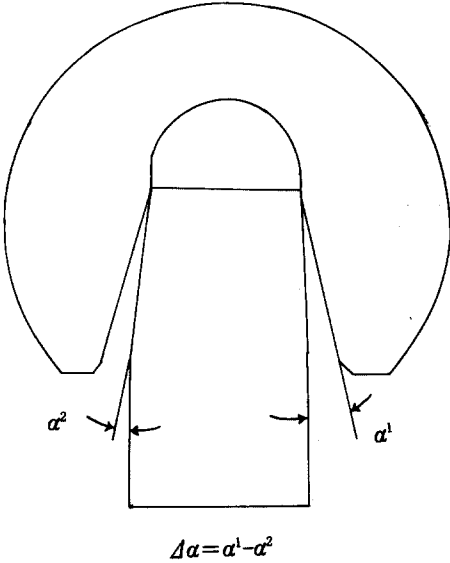
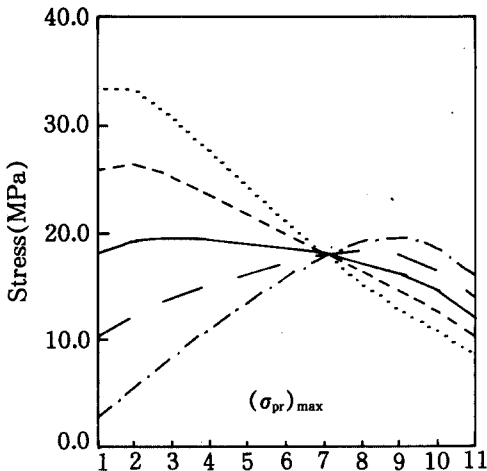
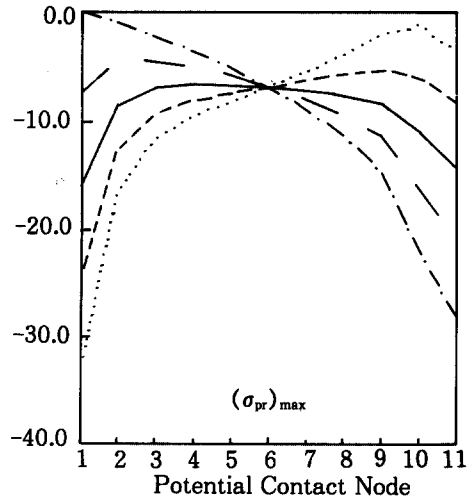


Fig. 5. Mismatching of Cone Angle of Artificial Hip Joint.



(A) BALL



(B) CONE

$\Delta\sigma = -0.005^\circ \dots\dots, -0.0025^\circ \text{---}, 0.0^\circ \text{—}, 0.0025^\circ \text{---}, 0.005^\circ \text{---}$

Fig. 6. Variation of  $(\sigma_{pr})_{max}$  by Mismatching of Cone Angle when  $\alpha^1=3^\circ, \mu=0.2, F=2000N$ .

는 각각 142(DOF), 112(DOF)이다. 예상 접촉 절점의 갯수는 등간격으로 11개로 했으며 이들의 절점번호를 그림 4에 나타내었다.

## 결 과

### 1. 원추각의 영향

원추각이 응력분포에 미치는 영향을 알기 위하여 원추각을  $1^\circ, 3^\circ, 5^\circ$ 로 변화시키면서 결과를 비교해 보기로 한다. 여기서 작용하중은 2000N으로 하였으며 마찰을 고려했을 경우에는 계수를 0.2로 하였다. 그림 1은 마찰을 고려했을 경우 원추각의 변화에 따른 응력의 변화를 나타낸 것이다. 먼저 마찰을 무시했을 경우와 비교해 보면 응력값들이 상당히 작음을 알 수가 있고 예로 들어 ball에 대해서  $1^\circ$ 와  $3^\circ$ 인 경우를 비교해보면  $1^\circ$ 인 경우에는 약 11배,  $3^\circ$ 인 경우에는 약 4배의 차이가 나고 있다. 응력값들의 변화는 마찰을 무시했을 때와 마찬가지로 원추각이 증가함에 따라 응력값은 작아지기는 하나 무시했을 때 비해서는 그리 심하지 않다. 먼저 등가응력의 변화를 살펴보면 ball에 대해서는 절점 1에서의 집중이 심하며 원추각의 영향도 많이 받는 편이다. cone에 대해서는 반대로 절점 11에서 집중이 생기며 절점 1, 2에서는 변화가 거의 없고 중앙부에서 변화가 크다. 주응력의 변화는 ball에 대해서는 절점 1쪽에서 원추각의 영향을 많이 받으며 절

점 11쪽에서는 영향을 거의 받지 않는다. 그리고 cone의 최대 주응력의 변화는 거의 영향을 받지 않으며 최소 주응력만이 접촉면 중간부분에서 조금 받는다. 그리고 ball의 최대 주응력의 위치는 접촉면 양단이 아니고 절점 2, 3부근에서 발생함을 알 수 있다.

## 2. 원추각 불일치의 영향

원추각 불일치가 응력분포에 미치는 영향을 알아보기 위하여 대표적으로 ball의 원추각  $3^\circ$ 인 경우에 대하여 cone의 원추각을 변화시켜 원추각 불일치 정도  $\pm 0.005^\circ$ ,  $\pm 0.0025^\circ$ ,  $0^\circ$ 를 주어가면서 정도해 보았다. 그림 6은 마찰을 고려했을 경우 원추각 불일치의 영향을 나타낸 것이다. 먼저 원추방향응력의 변화를 보면 이 경우에도 마찰을 무시했을 경우와 같이 음의 원추각 불일치가 절점 1에서 응력집중을 증가시키고 양일 때가 고르게 분산시키는 효과가 있으나 너무 큰 양의 값은 절점 9 근처에서 응력을 집중시킨다. 그러나 cone에 대해서는 불일치의 양, 음에 관계없이 일치하는 경우에 비해 접촉면 양단에서 응력이 집중된다.

이상의 결과로 보아 인장응력에 약한 ball의 재료인 세라믹을 기준으로할 경우 원추각 불일치를 양의 값으로 약간 주는 것이 절점 1에서 ball의 응력집중을 완화시키는 효과가 있다. 그러나 너무 큰 값으로 하면 오히려 절점 11에서 응력을 집중시킨다.

## 고 찰

모든 끼워 맞춤 요소가 하중을 받을 때 일어나는 공통된 문제점은 접촉면 양단에서 발생하는 응력집중 현상이다. 이는 재료의 파괴 및 마모의 중요한 원인이 되어 요소의 강도에 지대한 영향을 준다. 끼워 맞춤 방식의 인공고관절에서도 세라믹으로 만든 ball부분은 인장응력에 상당히 약하므로 이의 안정성과 내구성을 고려한 합리적인 접촉응력 해석이 필요하다.

끼워 맞춤 방식의 가장 단순한 해석방법은 Lamé<sup>19)</sup>가 제안한 축방향과 접선 방향을 접촉압력이 균일하다고 가정하여 구한 해를 이용하는 것이다. 또한 Wood<sup>21)</sup>는 크랭크 핀의 접촉 해석에서 접촉압력의 분포는 원주의 반에 걸쳐서 균일하다고 가정하였다. 그러나 이러한 초기의 해석들은 하중의 외부 평형 조건만을 고려하였으므로 축방향에 따르는 접촉압력의 분

포는 알 수가 없다. 이와 같은 점을 보완하기 위하여 이론적인 방법으로 물체의 형상이 간단하고 접촉영역이 작용하중에 따라 변하지 않는 열박음 요소에 대하여 몇몇 사람들이 해석하였다<sup>3, 16)</sup>. 그러나 이러한 방법도 적용되는 물체의 형상이 제한되기 때문에 유한요소법을 적용하기 시작하였다<sup>20)</sup>.

본질적으로 접촉문제는 해를 구하기 이전에는 접촉영역을 알지 못하므로 즉 하중에 따라 접촉영역이 변하는 이동 경계치 문제이므로 비선형 문제이다. 또한 접촉면의 분리는 응력집중을 가속화시킬 것이므로 끼워 맞춤 방식의 올바른 해석을 위하여는 접촉면의 분리를 고려한 해석이 필요하다.

분리를 고려한 접촉문제를 처음으로 연구한 사람은 Hertz였으며 그는 해석적으로 변위를 구할 수 있는 단순한 형상의 물체에 대하여 접촉 압력의 분포형상을 가정하여 접촉영역과 접촉압력의 크기를 구하였다. 그러나 이 방법도 적용되는 물체의 형상이 제한되었다. 전자계산기의 발달과 함께 유한요소법이 복잡한 형상을 가지고 있는 접촉문제를 수치적으로 해석하는데 이용되기 시작하였다. 유한요소법을 이용한 방법들은 다루는 방법에 따라 크게 두 부류로 나눌 수 있다. 첫번째 방법은 접촉하는 물체에 유한요소법을 적용하여 얻어진 선형연립방정식에 가정된 접촉조건을 포함시켜서 얻어진 해가 접촉조건을 만족할 때까지 축차적으로 해를 구하는 시행착오의 방법이다. 이 방법은 접촉조건을 만족여부를 검토하는 방법에 따라 두 가지로 나뉘는데 한 가지는 접촉영역을 두 물체를 연결하는 간격요소(gap element)로 모델링하여 이 요소들중 인장응력을 받는 요소가 없어질 때까지 반복하는 방법<sup>4, 12)</sup>이며 다른 한 가지는 접촉영역에서 비침투 조건을 모두 만족할 때까지 반복하는 방법이다<sup>1, 5, 6, 17)</sup>. 이 방법은 접촉영역을 미리 예측할 수 없는 경우에 축차회수는 크게 증가하게 되므로 해의 수렴을 빠르게 하기 위한 연구도 행하여졌다. 접촉문제를 다루는 두 번째 방법은 수학적 계획법을 이용하여 해를 구하는 방법으로 접촉문제를 지배하는 방정식들을 위치 에너지를 목적함수로 하고 접촉조건을 위치 에너지를 목적함수로 하고 접촉조건을 제한조건으로 하는 최소한 문제로 전환하여 직접 해를 구하는 방법이다<sup>2, 10, 15)</sup>. 최소화 문제는 이차 계획법 문제가 되어 이를 풀기 위한 여러 방법이 있다.

박<sup>15)</sup>은 접촉물체의 형상이 축대칭이고 하중이 비축대칭인 원추형 기워 맞춤 문제를 마찰을 무시하고서 이차계획법 문제로 바꾸어 해석하였는데 그는 준해석적 유한요소법을 적용하여 접선방향으로 모든 장변수를 Fourier 급수 전개 하여 비축대칭 하중을 취급하였다. 그리하여 반경방향과 축방향으로는 기존의 축대칭 유한 요소법을 이용하였다. 이렇게 함으로서 3차원 유한 요소법을 적용하는 경우에 비하여 계산시간이 훨씬 줄어든다는 것을 보였다.

## 결 론

1. 원추형 기워맞춤된 인공고관절의 접촉응력을 해석함에 있어 마찰력을 고려하였으며 그 결과를 ANSYS의 간격요소를 이용한 해석과 비교하여 좋은 일치를 보였고 계산시간은 약 1/50 가량 소요되었다.

2. 고관절 기워맞춤에서 마찰력을 고려한 결과는 무시한 결과보다 훨씬 낮은 응력 분포를 보여 주었으며 예로 원추각 1°인 경우 ball에 대해서 비교해 보면 약 11배의 차이가 있다.

3. 원추각의 영향은 마찰을 무시했을 경우가 고려했을 경우보다 크며 두 경우 모두 원추각이 증가함에 따라 응력의 크기는 감소한다.

4. 원추각이 불일치하는 경우로서 cone의 원추각이 큰 경우에는 ball에 큰 인장응력이 발생하나 cone의 원추각이 작을 경우에는 마찰을 무시했을 경우에 고려했을 경우 둘 다 ball의 인장응력을 고르게 분포시키는 효과가 있다. 그러나 이 불일치 정도를 마찰을 무시했을 경우에는 어느 정도 크게 하여도 무방하나 마찰을 고려하였을 때는 약간만 더 크게하면 다시 응력 집중이 발생한다.

## REFERENCES

- 1) Chan, S.K. and Tuba, I.S.: *A finite element method for contact problems of solid bodies-Part I. Theory and Validation. Int. J. Mech. Sci., 13: 615-625, 1971.*
- 2) Conry, T.F. and Seireg, A.: *A mathematical programming method for design of elastic bodies in contact. J. of Applied Mechanics, Trans. of ASME, JUNE: 387-392, 1971.*
- 3) Conway, H.D. and Farnhen, K.A.: *The shrink fit of a flexible sleeve on a shaft. Int. J.*

*Mech. Sci., 10: 757-764, 1968.*

- 4) Desallro, G.J. and Swanson, J.A.: *ANSYS engineering analysis systems user's manual Rev. 3, Swanson analysis systems, Inc., Houston, Pennsylvania, 1978.*
- 5) Francavalla, A. and Zienkiewicz, O.C.: *A note on numerical computation of elastic contact problems. Int. J. for Num. Methods in Engineering, 9: 913-924, 1975.*
- 6) Fredriksson, B.: *Finite element solution of surface nonlinearities in structural Computers and Structure, 6: 281-290, 1976.*
- 7) Haug, E.J. and Arora, J.S.: *Applied optimal design. pp. 124-133. John Wiley and Sone. 1979.*
- 8) Hinton, E. and Owen, D.: *Finite element programming. pp. 78-85. Academic Press. 1977.*
- 9) Huiskes, R. and Chao, E.Y.S.: *A survey of finite element analysis in orthopaedic biomechanics; The first decade. J. Biomechanics, 16-6: 385-409, 1983.*
- 10) Lee, B.C. and Kwak, B.M.: *A computational method for elastoplastic contact problems. Computers and Structures, 5: 757-765, 1984.*
- 11) Luenberger, D.G.: *Introduction to linear and nonlinear programming. pp. 224-236. Addison-Wesley, 1973.*
- 12) Mazurkiewicz, M. and Ostachowicz, M.: *Theory of finite element method for elastic contact problems of solid bodies. Computers and Structures, 1: 51-59, 1983.*
- 13) Okamoto, N. and Nakazawa, M.: *Finite element incremental contact analysis with various frictional conditions. Int. J. for Num. Methods in Engineering, 14: 337-357, 1979.*
- 14) Panne, V.D. and Whinston, A.: *The simplex and the dual method for Quadratic programming. Op. Res. Quart. 15: 355-388, 1964.*
- 15) Park, S.G.: *A three dimensional contact stress analysis of axisymmetric bodies. ph. D. Thesis, KAIST, Korea, 1986.*
- 16) Parson, B. and Wilson, E.A.: *A method for determining the surface contact stress resulting from interference fit. J. of Applied Mechanics, Trans. of ASME, FEB.: 208-218, 1970.*
- 17) Sachdeva, T.D., Ramashnan, C.V. and Natarajan, R.: *A finite element method for the*

- elastic contact problems. J. of Engineering for Industry, Trans. of ASME, 103 : 456-461, 1981.*
- 18) Sokolikoff, I.S.: *Mathematical theory of elasticity. pp. 175-194. McGraw-Hill, 1956.*
  - 19) Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N.: *Theory of elasticity. 3rd. Ed. pp. 224-243. McGraw-Hill, 1970.*
  - 20) White, D.J. and Humpherson, J.: *Finite element analysis of stresses in shafts due to interference fit hubs. J. Strain analysis. 4-2: 105-114. 1969.*
  - 21) Wood, J.K.: *Crankpin design for electric locomotives. American Mechanist, 25-62-26: 989-992, 1975.*
  - 22) Zienkiewicz, O.C.: *The finite element method. 3rd. Ed. pp. 69-84. McGraw-Hill, 1977.*